RJEŠENJE PISMENOG ISPITA, 7.07.2014.

A GRUPA

1. Zadane su točke $A(2,-2,1), B(0,1,3), C(-3,0,2), D(3,1,4)$. Odredite volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Rješenje: $\overrightarrow{AB} = (-2,3,2), \overrightarrow{AC} = (-5,2,1), \overrightarrow{AD} = (1,3,3)$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 8 \implies V = |8| = 8.$$

2. Zadana je funkcija $f(x) = \arcsin(2x\text{-}5) + \frac{1}{x-3}$. Odredite domenu funkcije i jednadžbu tangente u točki s apscisom $x_0 = \frac{5}{2}$.

Rješenje: uvjeti na domenu su:

- $-1 \leq 2x - 5 \leq 1 \implies 2 \leq x \leq 3$
- $x \neq 3$

$\mathcal{D}_f = [2, 3\rangle$.

$$y_0 = f\left(\frac{5}{2}\right) = \arcsin 0 - 2 = -2, f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-5)^2}} - \frac{1}{(x-3)^2}, f'\left(\frac{5}{2}\right) = 2 - 4 = -2$$

$$t \dots y - y_0 = f'(x)(x - x_0) \implies y + 2 = -2\left(x - \frac{5}{2}\right) \implies \boxed{y = -2x + 3}$$

3. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{3}{5}x^5 - 7x^4 + 20x^3 + 2x - 1$. Odredite domenu, intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije funkcije.

Rješenje: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^4 - 28x^3 + 60x^2 + 2$

$f''(x) = 12x^3 - 84x^2 + 120x = 12x(x^2 - 7x + 10) = 12x(x-2)(x-5) = 0 \implies x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 5$

	$\langle -\infty, 0\rangle$	$\langle 0,2\rangle$	$\langle 2,5\rangle$	$\langle 5, +\infty\rangle$
f''	-	+	-	+
f	konkavna	konveksna	konkavna	konveksna

Točke infleksije su $T_1 = (0,-1), T_2 = \left(2, {}^{351}/_{5}\right), T_3 = (5,9)$.

4. Riješite integral

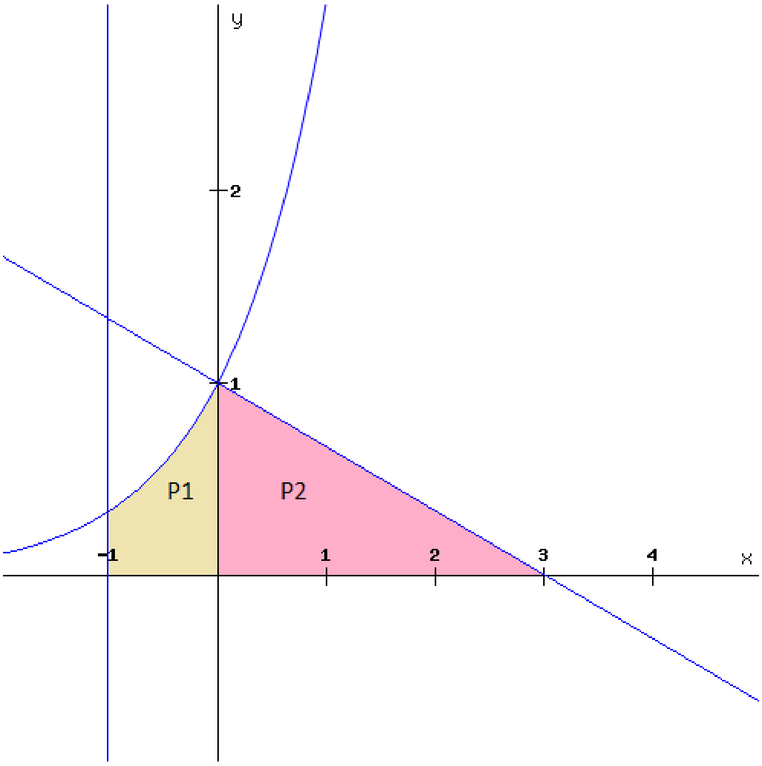
$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{9-(x^2+2x)^2}} dx.$$

Rješenje: nakon supstitucije: $[t = x^2 + 2x, dt = 2(x+1)dx, t_1 = 0, t_2 = 3]$ zadani integral prelazi u

$$\frac{1}{2}\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{3}\Big|_0^3 = \frac{1}{2}(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{\pi}{4}.$$

5. Izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $f(x) = 3^x$ i pravcima $x + 3y - 3 = 0, x = -1$ i x -osi.

Rješenje:



$$P1 = \int_{-1}^{0} 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{\ln 3}(3^0 - 3^{-1}) = \frac{2}{3\ln 3}, \quad P2 = \frac{3}{2}$$

$$P = P1 + P2 = \frac{2}{3\ln 3} + \frac{3}{2}.$$

B GRUPA

1. Zadane su točke $A(5,0,1), B(3,-1,1), C(2,4,0), D(-3,1,-2)$. Odredite volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Rješenje: $\overrightarrow{AB} = (-2,-1,0), \overrightarrow{AC} = (-3,4,-1), \overrightarrow{AD} = (-8,1,-3)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ -8 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 23 \Rightarrow V = 23 = 23.$$

2. Zadana je funkcija $f(x) = \sqrt{2x+1} - \frac{1}{x-3} + \sin 3x$. Odredite domenu funkcije i jednadžbu tangente u točki s apscisom $x_0 = 0$.

Rješenje: uvjeti na domenu su:

- $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$
- $x \neq 1$

$\mathcal{D}_f = [-\frac{1}{2}, 1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$.

$$y_0 = f(0) = 1+1+0 = 2, f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} + \frac{1}{(x-1)^2} + 3\cos 3x, f'(0) = 1 + 1 + 3 = 5$$

$$t \ldots y - y_0 = f'(x)(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 5(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = 5x + 2}$$

3. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 4x - 2$. Odredite domenu, intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije funkcije.

Rješenje: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 4$

$f''(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x = 4x(x^2 - 3x - 4) = 4x(x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 4$

	$\langle -\infty, -1\rangle$	$\langle -1, 0\rangle$	$\langle 0, 4\rangle$	$\langle 4, +\infty\rangle$
f''	-	+	-	+
f	konkavna	konveksna	konkavna	konveksna

Točke infleksije su $T_1 = \left(-1, -\frac{68}{15}\right), T_2 = (0, -2), T_3 = (4, -\frac{3118}{15})$.

4. Riješite integral

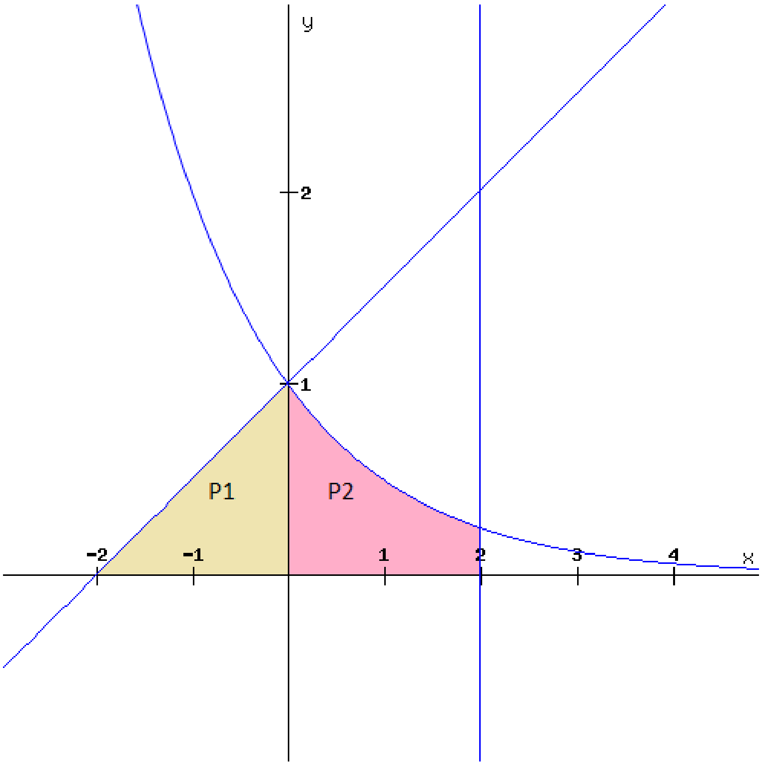
$$\int_1^2 \frac{8x - 6}{\cos^2(2x^2 - 3x + 1)} dx.$$

Rješenje: nakon supstitucije: $[t = 2x^2 - 3x + 1, dt = (4x - 3)dx, t_1 = 0, t_2 = 3]$ zadani integral prelazi u

$$2\int_0^3 \frac{dt}{\cos^2 t} = 2\text{tg}\, t \,|_0^3 = 2(\text{tg}\, 3 - \text{tg}\, 0) = 2\text{tg}\, 3$$

5. Izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i pravcima $x - 2y + 2 = 0, x = 2$ i x -osi.

Rješenje:



$$P2 = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \left.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}\right|_0^2 = \frac{1}{\ln\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{-3}{4\ln\frac{1}{2}} = \frac{3}{\ln 16}, \quad P1 = 1$$

$$P = P1 + P2 = 1 + \frac{3}{\ln 16}.$$