07.07.2014.

MATEMATIKA II

1. Zadana je matrica
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
i polinom $p(x) = 2x - 5$. Izračunajte $p(A^{-1} + I)$.

2. Odredite područje konvergencije reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{\sqrt{n}}$.

   (Obavezno ispitajte ponašanje u rubovima intervala.)

3. Zadana je funkcija
$$f(x,y) = \arcsin(y - x^2 + 3) + \ln(2y - 1).$$
Odredite i skicirajte domenu funkcije f te joj odredite gradijent.

4. Riješite diferencijalnu jednadžbu
$$(3x+1)y' + 3y = 2x.$$

5. Izračunajte integral
$$\iint_D (x-2)\, dxdy,$$
gdje je D područje omeđeno sa $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = 1$ i $x = 4$.

   Obavezno nacrtajte područje integracije D.

07.07.2014.

MATEMATIKA II - Rješenja

1. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -5 \\ 13 & -5 & -14 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} + I = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 \\ 13 & -4 & -14 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

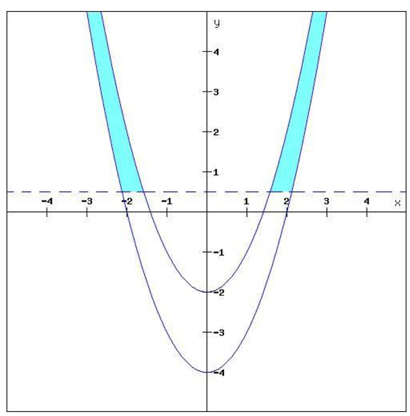
$$p(A^{-1}+I) = 2 \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 \\ 13 & -4 & -14 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -10 \\ 26 & -13 & -28 \\ 6 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

2. Nakon korištenja Cauchyjevog kriterija (može i D'Alembertov) dobivamo otvoreni interval $\langle 0, 2\rangle$.
Za $x = 0$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ koji divergira jer je to Dirichletov red za $p = \frac{1}{2} < 1$.
Za $x = 2$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ koji divergira jer je to Dirichletov red za $p = \frac{1}{2} < 1$.
Dakle, zadani red konvergira za sve $x \in \langle 0, 2\rangle$.

3. Uvjeti na domenu:

   (a) $-1 \leq y - x^2 + 3 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4 \leq y \leq x^2 - 2$

   (b) $2y - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad y > \frac{1}{2}$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{\sqrt{1-(y-x^2+3)^2}}$$

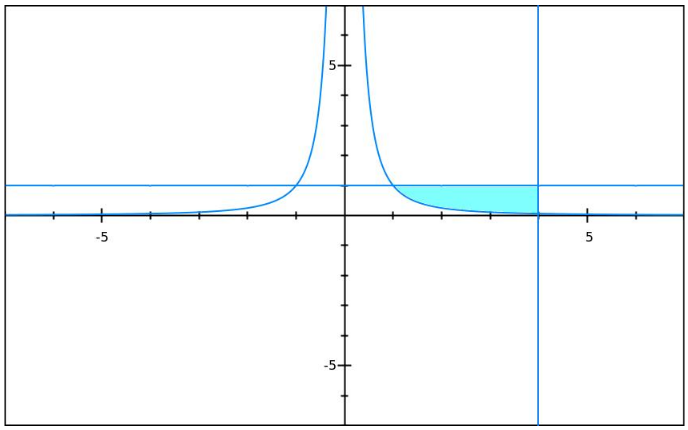
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(y-x^2+3)^2}} + \frac{2}{2y-1}$$

$$\nabla f = \frac{-2x}{\sqrt{1-(y-x^2+3)^2}} \cdot \vec{i} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-(y-x^2+3)^2}} + \frac{2}{2y-1} \right) \cdot \vec{j}$$

4. Zadana jednadžba je linearna diferencijalna jednadžba.

   Rješenje je: $y = \dfrac{x^2 + K}{3x + 1}$

5. Skica područja integracije:



$$\int_1^4 dx \int_{\frac{1}{x^2}}^{1} (x-2)\,dy = \int_1^4 (x-2)\left(y\Big|_{\frac{1}{x^2}}^{1}\right) dx = \int_1^4 (x-2)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx =$$

$$= \ldots = 3 - \ln 4$$

07.07.2014.

MATEMATIKA II

1. Zadana je matrica
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
i polinom $p(x) = 4x + 3$. Izračunajte $p(A^{-1} - I)$.

2. Odredite područje konvergencije reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n^3}$.

   (Obavezno ispitajte ponašanje u rubovima intervala.)

3. Zadana je funkcija
$$f(x, y) = \arccos(y + x^2 - 3) - \ln(2x + 5).$$
Odredite i skicirajte domenu funkcije f te joj odredite gradijent.

4. Riješite diferencijalnu jednadžbu
$$(2x - 1)y' + 2y = 3x^2.$$

5. Izračunajte integral
$$\iint_D (x + 3)\, dxdy,$$
gdje je D područje omeđeno sa $xy = 1$, $y = x$ i $x = 2$.
Obavezno nacrtajte područje integracije D.

07.07.2014.

MATEMATIKA II - Rješenja

1. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 11 & 1 & 15 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 11 & 0 & 15 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

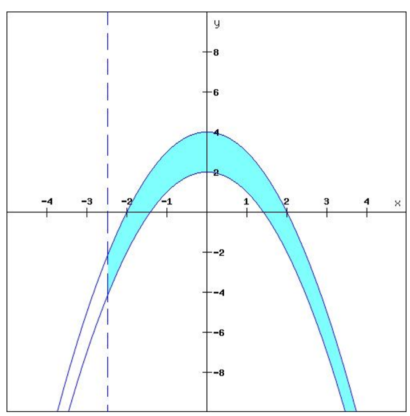
$$p(A^{-1} - I) = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 11 & 0 & 15 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 12 \\ 44 & 3 & 60 \\ -4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

2. Nakon korištenja Cauchyjevog kriterija (može i D'Alembertov) dobivamo otvoreni interval $\langle -2, 0 \rangle$.
   Za $x = -2$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ koji konvergira jer je to Dirichletov red za $p = 3 > 1$.
   Za $x = 0$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ koji konvergira jer je to Dirichletov red za $p = 3 > 1$.
   Dakle, zadani red konvergira za sve $x \in [-2, 0]$.

3. Uvjeti na domenu:

   (a) $-1 \leq y + x^2 - 3 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 2 \leq y \leq -x^2 + 4$

   (b) $2x + 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{5}{2}$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x}{\sqrt{1 - (y + x^2 - 3)^2}} - \frac{2}{2x + 5}$$

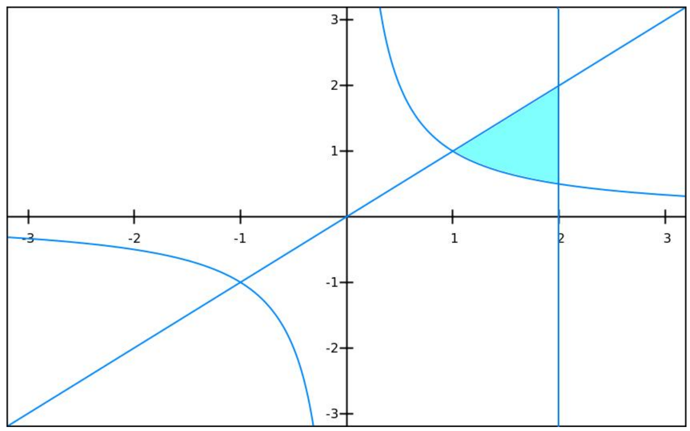
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - (y + x^2 - 3)^2}}$$

$$\nabla f = \left(-\frac{2x}{\sqrt{1 - (y + x^2 - 3)^2}} - \frac{2}{2x + 5} \right) \cdot \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{1 - (y + x^2 - 3)^2}} \cdot \vec{j}$$

4. Zadana jednadžba je linearna diferencijalna jednadžba.

   Rješenje je: $y = \dfrac{x^3 + K}{2x - 1}$

5. Skica područja integracije:



$$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} (x+3)\, dy = \int_1^2 (x+3) \left(y \Big|_{\frac{1}{x}}^{x} \right) dx = \int_1^2 (x+3) \left(x - \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= \ldots = \frac{35}{6} - 3 \ln 2$$