16.06.2014.

MATEMATIKA II

1. Riješite sustav linearnih jednadžbi pomoću Gaussovih eliminacija
$$\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 3y & + & 4z & = 2 \\ x & + & 3y & - & z & = 1 \\ 2x & + & 12y & - & 14z & = 2 \end{array}.$$

2. Odredite područje konvergencije reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

   (Obavezno ispitajte ponašanje u rubovima intervala.)

3. Zadana je funkcija
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{e^{2x}-y}{x^2+2y^2}}.$$
   Odredite i skicirajte domenu funkcije f te joj odredite prvi diferencijal.

4. Riješite diferencijalnu jednadžbu
$$(x^2-2y^2)dx + 3xydy = 0.$$

5. Izračunajte integral
$$\iint_D 2y\, dxdy,$$
   gdje je D područje omeđeno sa $(x-1)^2+y^2=1$, $y=-x^2+8x$, $x=1$ i $x=2$. Obavezno nacrtajte područje integracije D.

16.06.2014.

MATEMATIKA II - Rješenja

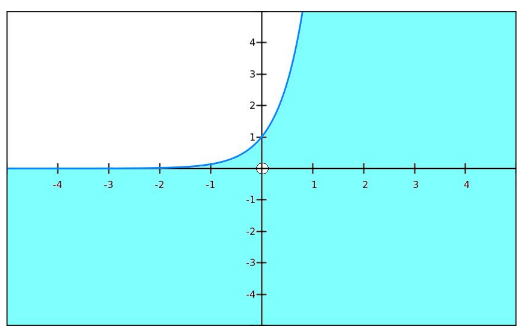
1. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

2. Nakon korištenja Cauchyjevog kriterija (može i D'Alembertov) dobivamo otvoreni interval $\langle 2, 3\rangle$.
   Za $x = 2$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ koji konvergira po Leibnizovom kriteriju.
   Za $x = 3$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ koji divergira jer je to Dirichletov red za $p = \frac{1}{2} < 1$.
   Dakle, zadani red konvergira za sve $x \in [2, 3\rangle$.

3. Uvjeti na domenu:

   (a) $x^2 + 2y^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (x, y) \neq (0, 0)$

   (b) $\dfrac{e^{2x} - y}{x^2 + 2y^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2x} - y \geq 0 \quad$ (jer je $x^2 + 2y^2 > 0$, za sve parove $(x, y) \neq (0, 0)$)



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{e^{2x}-y}{x^2+2y^2}}} \cdot \frac{2e^{2x}(x^2 + 2y^2) - (e^{2x} - y)2x}{(x^2 + 2y^2)^2}$$

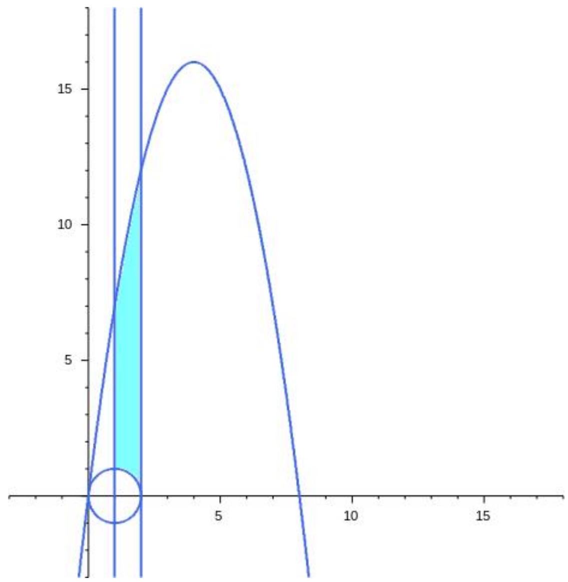
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{e^{2x}-y}{x^2+2y^2}}} \cdot \frac{-1(x^2 + 2y^2) - (e^{2x} - y)4y}{(x^2 + 2y^2)^2}$$

$$df = \frac{1}{2\sqrt{\frac{e^{2x}-y}{x^2+2y^2}}} \cdot \frac{2e^{2x}(x^2 + 2y^2) - (e^{2x} - y)2x}{(x^2 + 2y^2)^2} dx + \frac{1}{2\sqrt{\frac{e^{2x}-y}{x^2+2y^2}}} \cdot \frac{-1(x^2 + 2y^2) - (e^{2x} - y)4y}{(x^2 + 2y^2)^2} dy$$

4. Zadana jednadžba je homogena diferencijalna jednadžba.

   Rješenje je: $\ln x + \frac{3}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = C$.

5. Skica područja integracije:



$$\int_1^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{-x^2+8x} 2y\, dy = \ldots = \frac{1423}{15}$$

16.06.2014.

MATEMATIKA II

1. Riješite sustav linearnih jednadžbi pomoću Gaussovih eliminacija

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x & - & 5y & + & 3z & = 6 \\ -x & + & 3y & - & z & = 7 \\ 3x & - & 7y & + & 5z & = 19 \end{array}.$$

2. Odredite područje konvergencije reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n^2}$.

   (Obavezno ispitajte ponašanje u rubovima intervala.)

3. Zadana je funkcija

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{e^{3x} - y}{2x^2 + y^2}\right).$$

   Odredite i skicirajte domenu funkcije f te joj odredite prvi diferencijal.

4. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$(x^2 + 3y^2)dx - 4xydy = 0.$$

5. Izračunajte integral

$$\iint_D xy\, dxdy,$$

   gdje je D područje omeđeno sa $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $y = -x^2 - 6x$, $x = -1$ i $x = -2$. Obavezno nacrtajte područje integracije D.

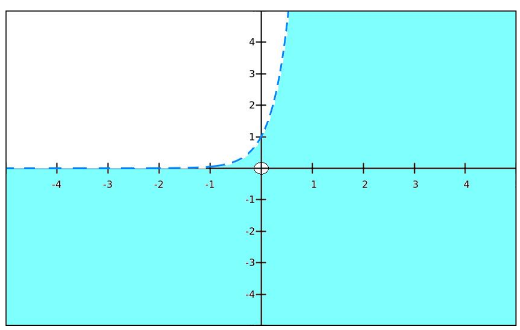
16.06.2014.

MATEMATIKA II - Rješenja

1. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 53 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

2. Nakon korištenja Cauchyjevog kriterija (može i D'Alembertov) dobivamo otvoreni interval $\left\langle 0, \frac{2}{3} \right\rangle$.
   Za $x = 0$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ koji konvergira po Leibnizovom kriteriju.
   Za $x = \frac{2}{3}$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ koji konvergira jer je to Dirichletov red za $p = 2 > 1$.
   Dakle, zadani red konvergira za sve $x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$.

3. Uvjeti na domenu:
   (a) $2x^2 + y^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (x, y) \neq (0, 0)$
   (b) $\dfrac{e^{3x} - y}{2x^2 + y^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2x} - y > 0 \quad$ (jer je $x^2 + 2y^2 > 0$, za sve parove $(x, y) \neq (0, 0)$)



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{e^{3x} - y} \cdot \frac{3e^{3x}(2x^2 + y^2) - (e^{3x} - y)4x}{2x^2 + y^2}$$

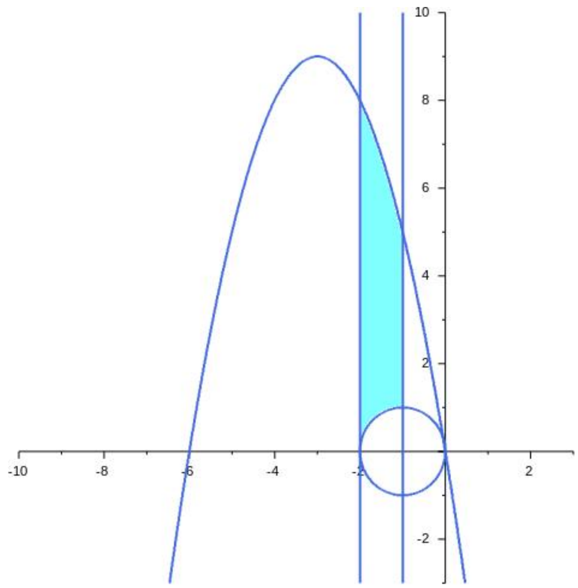
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{e^{3x} - y} \cdot \frac{-1(2x^2 + y^2) - (e^{3x} - y)2y}{x^2 + 2y^2}$$

$$df = \frac{1}{e^{3x} - y} \cdot \frac{3e^{3x}(2x^2 + y^2) - (e^{3x} - y)4x}{2x^2 + y^2} dx + \frac{1}{e^{3x} - y} \cdot \frac{-1(2x^2 + y^2) - (e^{3x} - y)2y}{x^2 + 2y^2} dy$$

4. Zadana jednadžba je homogena diferencijalna jednadžba.

   Rješenje je: $\ln x + 2\ln\left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = C$.

5. Skica područja integracije:



$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{\sqrt{-x^2-2x}}^{-x^2-6x} xy\, dy = \ldots = \frac{4417}{30}$$