MATEMATIKA 1, 16.02.2015., plava grupa

1. Zadani su vektori $\vec{a} = (0, 3, -2)$ i $\vec{b} = (7, 12, 18)$. Odredite vektor $\vec{c}$ iz uvjeta $\vec{a} \cdot \vec{c} = 4$ i $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$.

   $\vec{c} = (x, y, z) = ?$
   $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3y - 2z = 4$
   $\vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & -2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (3z + 2y, -2x, -3x) \Longrightarrow$
   $(3z + 2y, -2x, -3x) = (7, 12, 18) \Rightarrow x = -6, y = 2, z = 1$

2. Zadane su funkcije $f(x) = \log_2(9 - x^2) - \dfrac{3}{x^2 - 2x + 1}$ i $g(x) = \cos x$. Nađite domenu funkcije f i kompoziciju funkcija $f \circ g$.

   Domena:

   - $9 - x^2 > 0 \Rightarrow x \in \langle -3, 3 \rangle$
   - $x^2 - 2x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

   $\mathcal{D}_f = \langle -3, 3 \rangle \setminus \{1\}$
   Kompozicija: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\cos x) = \log_2(9 - \cos^2 x) - \dfrac{3}{\cos^2 x - 2\cos x + 1}$

3. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = 2(3x + 1)e^{x^2}$ u točki s apscisom $x_0 = -1$ i izračunajte površinu koja tangenta zatvara s koordinatnim osima.

   $y_0 = f(-1) = -4e$
   $f'(x) = 2e^{x^2}(3 + 2x + 6x^2) \Rightarrow k_t = f'(-1) = 14e$
   $t \ldots\ y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), y + 4e = 14e(x + 1) \Rightarrow y = 14ex + 10e$
   Površina koju tangenta zatvara sa koordinatnim osima je površina pravokutnog trokuta s katetama duljina $-\frac{10}{14}$ (odsječak na x-osi) i $10e$ (odsječak na y-osi)$\Rightarrow P = \frac{25}{7}e$

4. Riješite integrale:

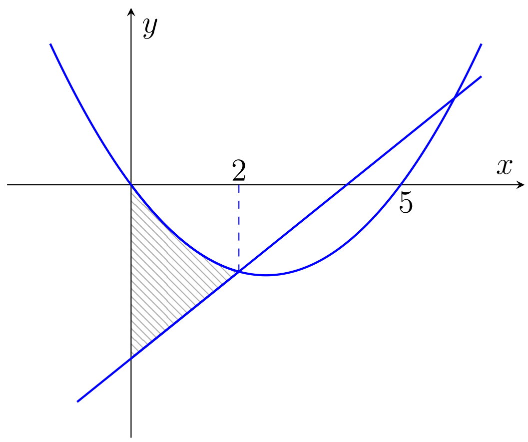
   (a)

$$\int \sin^{-1} x \cos^3 x \, \mathrm{d}x = \int \sin^{-1} x (1 - \sin^2 x) \cos x \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x \end{bmatrix}$$
$$= \int t^{-1}(1 - t^2) \, \mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t} - t \right) \mathrm{d}t$$
$$= \ln|\sin x| - \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

(b)

$$\int \frac{x-15}{x^2+5x-6}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{3}{x+6} - \frac{2}{x-1}\right)\,\mathrm{d}x = 3\ln|x+6| - 2\ln|x-1| + c$$

5. Skicirajte i izračunajte površinu lika omeđenog grafom funkcije $f(x) = x^2 - 5x$, pravcem $y = 3x - 12$ i y-osi.



$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 \left[x^2 - 5x - (3x-12)\right]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 (x^2 - 8x + 12)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x\right)\Big|_0^2 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

MATEMATIKA 1, 16.02.2015., bijela grupa

1. Zadani su vektori $\vec{a} = (1, 1, 0)$ i $\vec{b} = (1, -1, 0)$ i $\vec{c} = (0, -1, 2)$. Odredite vektor $\vec{d}$ iz uvjeta $\vec{c} \cdot \vec{d} = 1$ i $\vec{d} \times \vec{a} = \vec{b}$.

   $\vec{d} = (x, y, z) =?$
   $\vec{c} \cdot \vec{d} = -y + 2z = 1$
   $$\vec{d} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-z, z, x - y) \Longrightarrow$$
   $(-z, z, x - y) = (1, -1, 0) \Rightarrow x = -3, y = -3, z = 1$

2. Zadane su funkcije $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\ln(1-x)}$ i $g(x) = x^2 - 3x$. Nađite domenu funkcije f i kompoziciju funkcija $f \circ g$.

   Domena:

   - $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
   - $1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$
   - $\ln(1 - x) \neq 0 \Rightarrow 1 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$

   $\mathcal{D}_f = [-1, 1\rangle \setminus \{0\}$

   Kompozicija: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 3x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}{\ln(1 - x^2 + 3x)}$

3. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = -2(5x - 1)e^{x^2}$ u točki s apscisom $x_0 = 1$ i izračunajte površinu koja tangenta zatvara s koordinatnim osima.

   $y_0 = f(1) = -8e$
   $f'(x) = -2e^{x^2}(5 - 2x + 10x^2) \Rightarrow k_t = f'(1) = -26e$
   $t ... \; y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), y + 8e = -26e(x - 1) \Rightarrow y = -26ex + 18e$
   Površina koju tangenta zatvara sa koordinatnim osima je površina pravokutnog trokuta s katetama duljina $-\frac{18}{26}$ (odsječak na x-osi) i $18e$ (odsječak na y-osi)$\Rightarrow P = \frac{81}{13}e$

4. Riješite integrale:

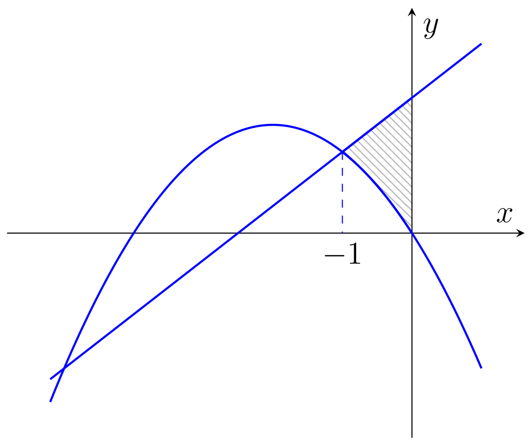
   (a)

$$\begin{aligned} \int \cos^{-2} x \sin^3 x \, \mathrm{d}x &= \int \cos^{-2} x (1 - \cos^2 x) \sin x \, \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x \end{bmatrix} \\ &= \int t^{-2}(1 - t^2)(-\,\mathrm{d}t) = \int \left(1 - t^{-2}\right) \mathrm{d}t \\ &= \cos x + \frac{1}{\cos x} + c \end{aligned}$$

(b)

$$\int \frac{x+11}{x^2-5x-14}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x-7} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = 2\ln|x-7| - \ln|x+2| + c$$

5. Skicirajte i izračunajte površinu lika omeđenog grafom funkcije $f(x) = -x^2 - 4x$, pravcem $y = 2x + 5$ i y-osi.



$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^{0} \left[2x + 5 - (-x^2 - 4x)\right]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} (x^2 + 6x + 5)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 5x\right)\Big|_{-1}^{0} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$