02.02.2015.

MATEMATIKA II

1. Riješite sustav linearnih jednadžbi pomoću Gaussovih eliminacija

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & -6 \end{array}.$$

2. Odredite područje konvergencije reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n \cdot 4^n}$.

   (Obavezno ispitajte ponašanje u rubovima intervala.)

3. Zadana je funkcija

$$f(x, y) = \frac{\ln(x^2 - 3x - 4 + y)}{y}.$$

   Odredite i skicirajte domenu funkcije f te joj odredite prvi diferencijal.

4. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$\left(y + \frac{2}{y^2} + \sin x\right) \mathrm{d}x + \left(x - \frac{4x}{y^3} - \ln y\right) \mathrm{d}y = 0.$$

5. Izračunajte integral

$$\iint_D (2x + 1)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

   gdje je D područje omeđeno sa $x^2 y = 1$, $y - x = 0$ i $x = 2$.
   Obavezno nacrtajte područje integracije D!

MATEMATIKA II - Rješenja

1. $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -13 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Nakon korištenja Cauchyjevog kriterija (može i D'Alembertov) dobivamo otvoreni interval $\langle -2, 2 \rangle$.

   Za $x = -2$ dobivamo red $-2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ koji divergira jer tu imamo harmonijski red.

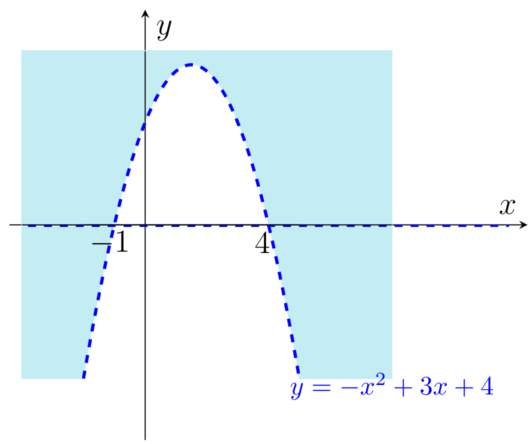
   Za $x = 2$ dobivamo red $2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ koji divergira jer tu imamo harmonijski red.

   Dakle, zadani red konvergira za sve $x \in \langle -2, 2 \rangle$.

3. Uvjeti na domenu:

   (i) $x^2 - 3x - 4 - y > 0 \quad \Rightarrow \quad y > -x^2 + 3x + 4$

   (ii) $y \neq 0$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x - 3}{y(x^2 - 3x - 4 + y)}$$

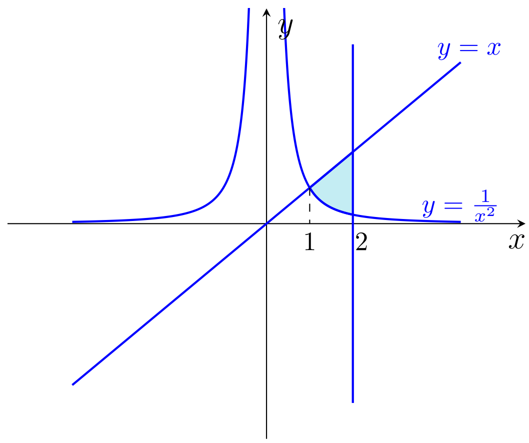
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{y}{x^2 - 3x - 4 + y} - \ln(x^2 - 3x - 4 + y)}{y^2}$$

$$\mathrm{d}f = \frac{2x - 3}{y(x^2 - 3x - 4 + y)}\,\mathrm{d}x + \frac{\frac{y}{x^2 - 3x - 4 + y} - \ln(x^2 - 3x - 4 + y)}{y^2}\,\mathrm{d}y$$

4. Zadana jednadžba je egzaktna diferencijalna jednadžba.

   Rješenje je: $xy + \dfrac{2x}{y^2} - \cos x - y \ln y + y = C.$

5. Skica područja integracije:



$$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{x^2}}^{x} (2x+1)\,\mathrm{d}y = \ldots = \frac{17}{3} - 2\ln 2$$

02.02.2015.

MATEMATIKA II

1. Riješite sustav linearnih jednadžbi pomoću Gaussovih eliminacija

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\
2x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 7x_4 & = & -2 \\
x_1 & & & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1
\end{array}.
$$

2. Odredite područje konvergencije reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n \cdot 9^n}$.

   (Obavezno ispitajte ponašanje u rubovima intervala.)

3. Zadana je funkcija

$$f(x, y) = \frac{\ln(x^2 - 2x - 8 + y)}{x}.$$

   Odredite i skicirajte domenu funkcije f te joj odredite prvi diferencijal.

4. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$\left(\frac{2}{y^2} + 3\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x + \left(\ln y - \frac{4x}{y^3}\right) \mathrm{d}y = 0.$$

5. Izračunajte integral

$$\iint\limits_D (x + y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

   gdje je D područje omeđeno sa $xy = 1$, $y - x = 0$ i $y = -2$.
   Obavezno nacrtajte područje integracije D!

MATEMATIKA II - Rješenja

1. $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 3 \\ 0 \\ 2/3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Nakon korištenja Cauchyjevog kriterija (može i D'Alembertov) dobivamo otvoreni interval $\langle -3, 3\rangle$.

   Za $x = -3$ dobivamo red $-\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ koji divergira jer tu imamo harmonijski red.

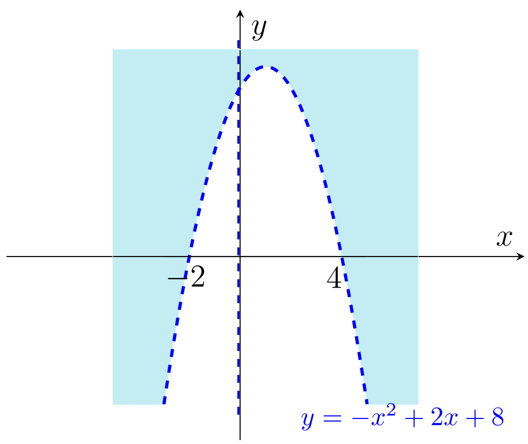
   Za $x = 3$ dobivamo red $\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ koji divergira jer tu imamo harmonijski red.

   Dakle, zadani red konvergira za sve $x \in \langle -3, 3\rangle$.

3. Uvjeti na domenu:

   (i) $x^2 - 2x - 8 - y > 0 \quad \Rightarrow \quad y > -x^2 + 2x + 8$

   (ii) $x \neq 0$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{2x-2}{x^2-2x-8+y} \cdot x - \ln(x^2 - 2x - 8 + y)}{x^2}$$

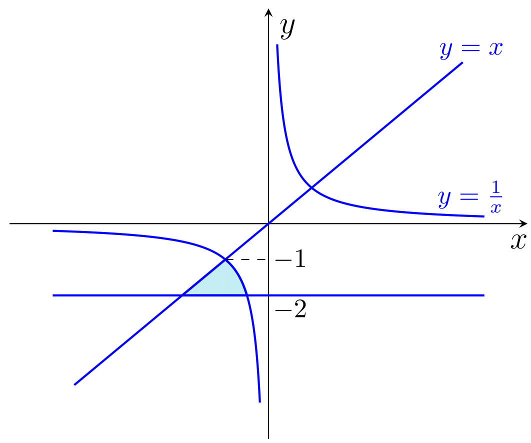
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x(x^2 - 2x - 8 + y)}$$

$$\mathrm{d}f = \frac{\frac{2x-2}{x^2-2x-8+y} \cdot x - \ln(x^2 - 2x - 8 + y)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{x(x^2 - 2x - 8 + y)}\,\mathrm{d}y$$

4. Zadana jednadžba je egzaktna diferencijalna jednadžba.

   Rješenje je: $\dfrac{2x}{y^3} + 2\sqrt{x^3} + y \ln y - y = C.$

5. Skica područja integracije:



$$\int_{-2}^{-1} \mathrm{d}y \int_{y}^{\frac{1}{y}} (x+y)\,\mathrm{d}x = \ldots = -\frac{9}{4}$$