06.07.2015.

MATEMATIKA II

1. Riješite matričnu jednadžbu $AX + BX = C$, ako su zadane matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 4 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -4 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Odredite područje konvergencije reda funkcija (obavezno ispitajte ponašanje na rubovima intervala)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(x-1))^n}{2^n \cdot n^3}.$$

3. Zadana je funkcija $f(x,y) = \arcsin(2y-5) - x \cdot \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Odredite i skicirajte domenu funkcije te joj odredite prvi diferencijal.

4. Odredite ono partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\left(\ln y + 2x^2 y\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{x}{y} + \frac{2}{3}x^3 - \sin 2y\right) \mathrm{d}y = 0$$

koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

5. Skicirajte područje integracije, zamijenite poredak integriranja i zatim izračunajte integral

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_1^{x^2+1} 2xy \, \mathrm{d}y.$$

06.07.2015.

MATEMATIKA II - Rješenja

1. $AX + BX = C \;\Rightarrow\; (A+B)X = C \;\Rightarrow\; X = (A+B)^{-1}C$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; (A+B)^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Nakon korištenja Cauchyjevog kriterija (može i D'Alembertov) dobivamo otvoreni interval $\langle e^{-2}+1,\; e^2+1\rangle$.

   Za $x = e^{-2}+1$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ koji konvergira po Leibnizovom kriteriju.

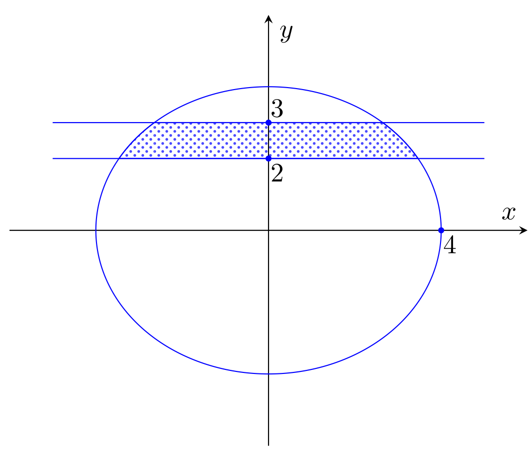
   Za $x = e^2+1$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ koji konvergira jer je to Dirichletov red za $p = 3 > 1$.

   Dakle, zadani red konvergira za sve $x \in [e^{-2}+1,\; e^2+1]$.

3. Uvjeti na domenu:

   (a) $-1 \leq 2y - 5 \leq 1 \;\Rightarrow\; 2 \leq y \leq 3$

   (b) $16 - x^2 - y^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 \leq 16$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sqrt{16 - x^2 - y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$$

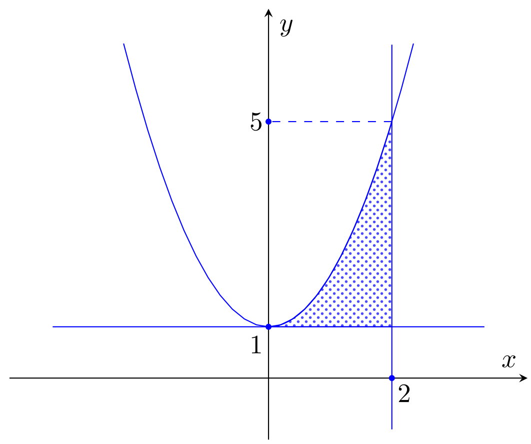
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{\sqrt{1 - (2y-5)^2}} + \frac{xy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$$

$$\mathrm{d}f = \left(-\sqrt{16 - x^2 - y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{2}{\sqrt{1 - (2y-5)^2}} + \frac{xy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}\right)\mathrm{d}y$$

4. Zadana jednadžba je egzaktna diferencijalna jednadžba.

   Rješenje je: $x \ln y + \dfrac{2}{3}x^3 y + \dfrac{1}{2}\cos 2y = -\dfrac{1}{2}$

5. Skica područja integracije:



$$\int_1^5 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y-1}}^{2} 2xy \,\mathrm{d}x = \int_1^5 y \left(x^2 \Big|_{\sqrt{y-1}}^{2} \right) \mathrm{d}y = \int_1^5 y(5-y)\,\mathrm{d}y = \ldots = \frac{56}{3}$$

06.07.2015.

MATEMATIKA II

1. Riješite matričnu jednadžbu $XA - XB = C$, ako su zadane matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \text{ i } C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Odredite područje konvergencije reda funkcija (obavezno ispitajte ponašanje na rubovima intervala)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{3^n \cdot n}.$$

3. Zadana je funkcija $f(x,y) = y \cdot \sqrt{x^2+y^2-9} + \arccos(2x+3)$. Odredite i skicirajte domenu funkcije te joj odredite prvi diferencijal.

4. Odredite ono partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\left(\frac{y}{x} + 4y^2\right) \mathrm{d}x + \left(8xy + \ln x - e^{3y}\right) \mathrm{d}y = 0$$

koje zadovoljava početni uvjet $y(2) = 0$.

5. Skicirajte područje integracije, zamijenite poredak integriranja i zatim izračunajte integral

$$\int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{2}^{x^2+2} 2x^3 \, \mathrm{d}y.$$

06.07.2015.

MATEMATIKA II - Rješenja

1. $XA - XB = C \;\Rightarrow\; X(A-B) = C \;\Rightarrow\; X = C(A-B)^{-1}$

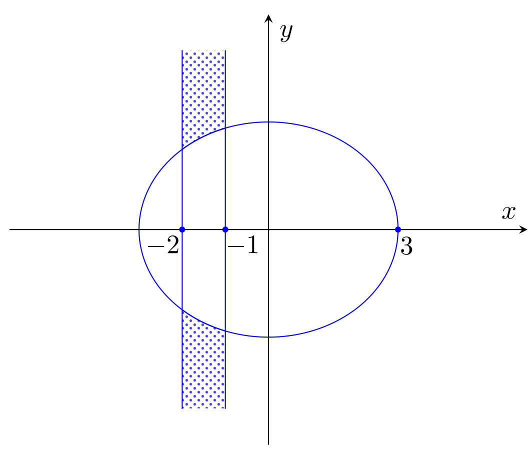
$$A-B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; (A-B)^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 14 & 4 & -7 \\ -17 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

2. Nakon korištenja Cauchyjevog kriterija (može i D'Alembertov) dobivamo otvoreni interval $\langle e^{-3}+1,\ e^{3}+1\rangle$.
   Za $x = e^{-3}+1$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ koji konvergira po Leibnizovom kriteriju.
   Za $x = e^{3}+1$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ koji divergira jer je to harmonijski red.
   Dakle, zadani red konvergira za sve $x \in [e^{-2}+1,\ e^{2}+1\rangle$.

3. Uvjeti na domenu:

   (a) $x^2+y^2-9 \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2+y^2 \geq 9$

   (b) $-1 \leq 2x+3 \leq 1 \;\Rightarrow\; -2 \leq x \leq -1$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-9}} - \frac{2}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$$

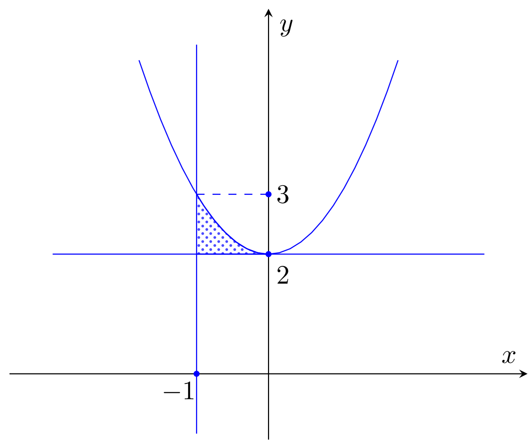
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2-9} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$$

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-9}} - \frac{2}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}\right)\mathrm{d}x + \left(\sqrt{x^2+y^2-9} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2-9}}\right)\mathrm{d}y$$

4. Zadana jednadžba je egzaktna diferencijalna jednadžba.

   Rješenje je: $y \ln x + 4xy^2 - \dfrac{1}{3}e^{3y} = -\dfrac{1}{3}$

5. Skica područja integracije:



$$\int_2^3 \mathrm{d}y \int_{-1}^{-\sqrt{y-2}} 2x^3 \,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{1}{2}\left(x^4 \Big|_{-1}^{-\sqrt{y-2}}\right) \mathrm{d}y = \int_2^3 \frac{1}{2}\left((y-2)^2 - 1\right) \mathrm{d}y = \ldots = -\frac{1}{3}$$