RJEŠENJE PISMENOG ISPITA, MATEMATIKA 1, 6.02.2017.

A grupa:

1. Zadani su vektori $\vec{a} = (-1, 0, 3)$ i $\vec{b} = (6, 1, 2)$. Izračunajte vektor $\vec{c} = (x, y, z)$ iz uvjeta $\vec{a} \cdot \vec{c} = -17$ i $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$.

   $\vec{a} \cdot \vec{c} = -x + 3z = -17 \Rightarrow x = 3z + 17,$

   $\vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-3y, z + 3x, -y) = (6, 1, 2) \Rightarrow y = -2$

   Iz $z + 3x = 1$ i $x = 3z + 17$ dobivamo $10z = 1 - 51 \Rightarrow z = -5 \Rightarrow \vec{c} = (2, -2, -5)$.

2. Zadana je funkcija $f(x) = \dfrac{x+1}{3x-6} + \ln(-x^2 + 4x)$.

   (a) Odredite domenu funkcije f. Uvjeti:

   - $3x - 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$
   - $-x^2 + 4x > 0$ (skicirajte parabolu) $\Rightarrow x \in \langle 0, 4\rangle$

   Domena funkcije je $\mathcal{D}_f = \langle 0, 4\rangle \setminus \{2\}$

   (b) Nađite prvu derivaciju funkcije f.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (3x-6) - (x+1) \cdot 3}{(3x-6)^2} + \frac{-2x+4}{-x^2+4x} = \frac{-9}{(3x-6)^2} + \frac{-2x+4}{-x^2+4x}$$

3. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije funkcije

$$f(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{3}{x} + 1.$$

   Domena funkcije je $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$$f'(x) = \frac{2}{9}x + \frac{3}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{9} - \frac{6}{x^3} = \frac{2x^3 - 54}{9x^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 = 54, x^3 = 27, x = 3.$$

	0		3	
f''	+	−		+
f	$\cup$	$\cap$		$\cup$

   Funkcija je konveksna na $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$, konkavna na $\langle 0, 3\rangle$ i ima jednu točku infleksije $I(3, 1)$.

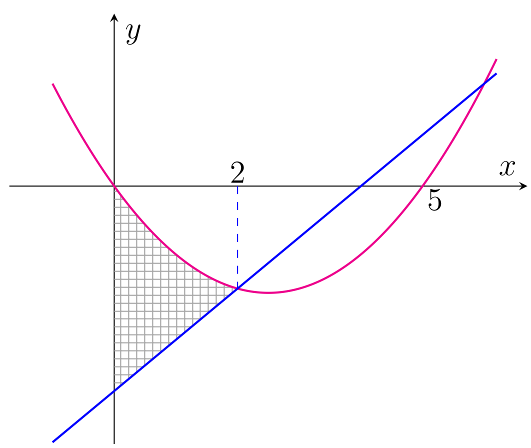
4. Riješite integrale:

(a) $\int x^3 \ln(2x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln 2x & v' = x^3 \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^4}{4} \end{bmatrix} = \frac{x^4}{4}\ln 2x - \int \frac{x^3}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln 2x - \frac{x^4}{16} + c$

(b)

$$\begin{aligned}\int \sin^{-2} x \cos^3 x\,\mathrm{d}x &= \int \sin^{-2} x(1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} \\ &= \int t^{-2}(1-t^2)dt = \int (t^{-2}-1)dt = -\frac{1}{t} - t + c \\ &= -\frac{1}{\sin x} - \sin x + c\end{aligned}$$

5. Skicirajte i izračunajte površinu lika omeđenog grafom funkcije $f(x) = x^2 - 5x$, pravcem $y = 3x - 12$ i y-osi.



$$P = \int_0^2 (x^2 - 5x - (3x-12))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (x^2 - 8x + 12)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x\Big|_0^2 = \frac{32}{3}$$

B grupa:

1. Zadani su vektori $\vec{a} = (0, 5, -1)$ i $\vec{b} = (4, -3, -15)$. Izračunajte vektor $\vec{c} = (x, y, z)$ iz uvjeta $\vec{a} \cdot \vec{c} = -6$ i $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$.

   $\vec{a} \cdot \vec{c} = 5y - z = -6 \Rightarrow z = 5y + 6,$

   $\vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (5z + y, -x, -5x) = (4, -3, -15) \Rightarrow x = 3$

   Iz $5z + y = 4$ i $z = 5y + 6$ dobivamo $26y = 4 - 30 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \vec{c} = (3, -1, 1)$.

2. Zadana je funkcija $f(x) = \dfrac{1}{2x+4} + \sqrt{-x^2 - 3x} + \ln 2$.

   (a) Odredite domenu funkcije f. Uvjeti:

   - $2x + 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$
   - $-x^2 - 3x \geq 0$ (skicirajte parabolu) $\Rightarrow x \in [-3, 0]$

   Domena funkcije je $\mathcal{D}_f = [-3, 0] \setminus \{-2\}$

   (b) Nađite prvu derivaciju funkcije f.

$$f'(x) = \frac{-2}{(2x+4)^2} + \frac{-2x - 3}{2\sqrt{-x^2 - 3x}}$$

3. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije funkcije

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{x} - 5.$$

   Domena funkcije je $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$$f'(x) = x - \frac{4}{x^2}, \quad f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 = -8, x = -2.$$

		-2		0	
f''	+		−		+
f	∪		∩		∪

   Funkcija je konveksna na $\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$, konkavna na $\langle -2, 0\rangle$ i ima jednu točku infleksije $I(-2, -5)$.

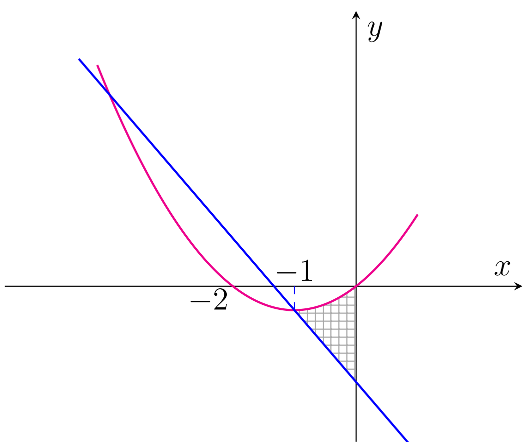
4. Riješite integrale:

   (a) $$\int x^2 \ln(3x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln 3x & v' = x^2 \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \frac{x^3}{3}\ln 3x - \int \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln 3x - \frac{x^2}{9} + c$$

(b)

$$\int \cos^{-1} x \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \int \cos^{-1} x(1-\cos^2 x)\sin x \,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x \,\mathrm{d}x \end{bmatrix}$$
$$= \int t^{-1}(1-t^2)(-dt) = \int (t - t^{-1})dt = \frac{t^2}{2} - \ln|t| + c$$
$$= \frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + c$$

5. Skicirajte i izračunajte površinu lika omeđenog grafom funkcije $f(x) = x^2 + 2x$, pravcem $y = -3x - 4$ i y-osi.



$$P = \int_{-1}^{0} (x^2 + 2x - (-3x-4))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (x^2 + 5x + 4)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + 4x\Big|_{-1}^{0} = \frac{11}{6}$$