TABLICA DERIVACIJA

$c' = 0, \quad c \in \mathbb{R}$	$x' = 1$
$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}$	$(x^c)' = cx^{c-1}, \quad c \in \mathbb{R}, x > 0$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$
$(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, a \neq 1, x > 0$
$(e^x)' = e^x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \; x > 0$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	$(\operatorname{Arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$(\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$(\operatorname{Arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert > 1$

DOMENA FUNKCIJE

Uvjeti za traženje domene funkcije:

1. $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \;\Rightarrow\; h(x) \neq 0$ (uvjet nazivnika)
2. $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)} \;\Rightarrow\; g(x) \geq 0$ (uvjet parnog korijena)
3. $f(x) = \log_a(g(x)) \;\Rightarrow\; g(x) > 0$ (uvjet logaritma)
4. $f(x) = \arcsin(g(x))$ ili $f(x) = \arccos(g(x)) \;\Rightarrow\; -1 \leq g(x) \leq 1$
5. $f(x) = \operatorname{cth}(g(x)) \;\Rightarrow\; g(x) \neq 0$
6. $f(x) = \operatorname{Arch}(g(x)) \;\Rightarrow\; g(x) \geq 1$
   $f(x) = \operatorname{Arth}(g(x)) \;\Rightarrow\; -1 < g(x) < 1$
   $f(x) = \operatorname{Arcth}(g(x)) \;\Rightarrow\; g(x) < -1$ ili $g(x) > 1$

Jednadžba tangencijalne ravnine na implicitno zadanu plohu $F(x, y, z) = 0$ u točki $T(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_T (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_T (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_T (z - z_0) = 0.$$

TABLICA INTEGRALA

$$\int \mathrm{d}x = x + C$$

$$\int x^r \, \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \in \mathbb{R}, r \neq -1$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \operatorname{sh} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Arsh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arch} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Geometrijski red: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots, \quad q \in \mathbb{R}$

- $|q| < 1 \Rightarrow$ red konvergira i suma reda je $\dfrac{1}{1-q}$
- $|q| \geq 1 \Rightarrow$ red divergira

Dirichletov red: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots, \quad p \in \mathbb{R}$ (za $p = 1$ zove se još i harmonijski red)

- $p > 1 \Rightarrow$ red konvergira
- $p \leq 1 \Rightarrow$ red divergira

Nužan uvjet konvergencije je da opći član reda mora težiti k nuli, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
(Primjena: ako to ne vrijedi, odmah zaključujemo da je red divergentan!)

KRITERIJI KONVERGENCIJE

1. **D'Alembertov kriterij**

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ tada za

- $L < 1 \Rightarrow$ red konvergira
- $L > 1 \Rightarrow$ red divergira
- $L = 1 \Rightarrow$ nema odluke

2. **Cauchyjev kriterij**

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ tada za

- $L < 1 \Rightarrow$ red konvergira
- $L > 1 \Rightarrow$ red divergira
- $L = 1 \Rightarrow$ nema odluke

3. **Kriterij uspoređivanja I**

Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima. Ako postoji $k > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je $a_n \leq k b_n$, za sve $n \geq n_0$ tada

- $\sum b_n$ konvergira $\Rightarrow \sum a_n$ konvergira
- $\sum a_n$ divergira $\Rightarrow \sum b_n$ divergira.

4. **Kriterij uspoređivanja II**

Ako postoji konačan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ različit od nule, onda oba reda $\sum a_n$ i $\sum b_n$ ili konvergiraju ili divergiraju.

5. **Leibnizov kriterij**

Ako za niz (c_n) pozitivnih brojeva vrijedi

- (c_n) je padajući
- $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$

tada alternirajući red $\sum (-1)^n c_n = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - \cdots$ konvergira.

Za red funkcija $\sum f_n$ područje konvergencije određujemo pomoću nejednadžbi iz jednog od uvjeta:

1. D'Alembertov kriterij: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| < 1$
2. Cauchyjev kriterij: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} < 1$

Rubovi područja konvergencije ispituju se posebno!

Opći oblik **linearne diferencijalne jednadžbe višeg reda s konstantnim koeficijentima** je

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Konačno opće rješenje je oblika

$$y = y_0 + y_p,$$

gdje je

- y_0 opće rješenje pripadne homogene jednadžbe ($f(x) = 0$)
- y_p partikularno rješenje nehomogene jednadžbe ($f(x) \neq 0$)

I KORAK: Određivanje općeg rješenja homogene jednadžbe

Tražimo rješenja jednadžbe oblika $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Prvo odredimo korijene (rješenja) karakteristične jednadžbe

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0 = 0.$$

U ovisnosti o korijenima karakteristične jednadžbe određujemo opće rješenje. Ako je:

- $k = a$ realni korijen višestrukosti m, onda imamo m linearno nezavisnih rješenja:

$$y_1 = e^{ax}, \quad y_2 = xe^{ax}, \ldots, \ y_m = x^{m-1} e^{ax}$$

- $k = \alpha \pm i\beta$ par kompleksnih rješenja višestrukosti m, onda imamo $2m$ linearno nezavisnih rješenja:

$$\begin{array}{llll} y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, & y_3 = xe^{\alpha x} \cos \beta x, & \ldots & y_{2m-1} = x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x, & y_4 = xe^{\alpha x} \sin \beta x, & \ldots & y_{2m} = x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{array}$$

Opće rješenje homogene jednadžbe tada je:

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \quad \text{gdju su } C_1, C_2, \ldots, C_n \text{ neodređene konstante.}$$

II KORAK: Određivanje partikularnog rješenja

Pogađanje partikularnog rješenja y_p nehomogene jednadžbe metodom neodređenih koeficijenata moguće je ako funkcija smetnje $f(x)$ ima poseban opći oblik. Ako je:

- $f(x) = e^{bx} P_n(x), \quad b \in \mathbb{R}, \ P_n(x)$ polinom stupnja n
  - ako b nije korijen karakteristične jednadžbe tada stavljamo $y_p = e^{bx} Q_n(x)$, gdje je $Q_n(x)$ polinom n-tog stupnja s neodređenim koeficijentima
  - ako b je korijen karakteristične jednadžbe tada stavljamo $y_p = x^r e^{bx} Q_n(x)$, gdje je $Q_n(x)$ polinom n-tog stupnja s neodređenim koeficijentima, a r višestrukost korijena b
- $f(x) = e^{\gamma x} \left[P_n(x) \cos \delta x + Q_m(x) \sin \delta x \right], \ \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \ P_n(x)$ polinom st. n, $Q_m(x)$ polinom st. m
  - ako $\gamma \pm i\delta$ nije korijen karakteristične jednadžbe tada stavljamo
    $y_p = e^{\gamma x} \left[R_N(x) \cos \delta x + S_N(x) \sin \delta x \right]$, gdje su $R_N(x)$ i $S_N(x)$ polinomi N-tog stupnja s neodređenim koeficijentima, $N = \max \{n, m\}$
  - ako $\gamma \pm i\delta$ je korijen karakteristične jednadžbe tada stavljamo
    $y_p = x^r e^{\gamma x} \left[R_N(x) \cos \delta x + S_N(x) \sin \delta x \right]$, gdje su $R_N(x)$ i $S_N(x)$ polinomi N-tog stupnja s neodređenim koeficijentima, $N = \max \{n, m\}$, a r je višestrukost korijena $\gamma \pm i\delta$

U općem slučaju, za neki drugi oblik $f(x)$, partikulrano rješenje određujemo metodom varijacije konstanti.