

UPRAVLJANJE PLOVNIM OBJEKTIMA MATEMATIČKO MODELIRANJE VALOVA

Sadko Mandžuka, Brodarski institut, d.o.o., Zagreb,
Ljubomir Kuljača, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb

Sadržaj - Za potrebe projektiranja različitih sustava upravljanja plovnim objektima (kurs, trajektorija, stabilizacija ljuljanja, dinamičko pozicioniranje i dr.) potrebno je definirati značajke poremećaja (vjetar, valovi i morske struje). Uobičajeni pristup za opis vjetrovih valova je primjena energetskih spektara (Pierson-Moskowitz, JONSWAP, Voznesensky-Netsvetaeva, Darbyshirea, Tabain, idr.). Primjenom tehnike spektralne faktorizacije spektri valova mogu se predstaviti prijenosnom funkcijom u linearnom području. U radu je prikazan jedan algoritam nelinearne regresije primijenjen za racionalizaciju spektra vjetrovih valova.

1. UVOD

Radovima brodograđevnog inženjera M.St. Denisa i oceanologa W.J.Piersona, u ranim pedesetim godinama, otpočeo je novi pristup opisa ponašanja plovnih objekata na morskim valovima [1]. Osnovna značajka njihova pristupa je opis ponašanja broda na valovima primjenom analognog modela linearnog oscilatora. U tom slučaju uzbuda je opisana u obliku spektra gustoće valne energije. Do danas je napravljen čitav niz matematičkih modela spektara vjetrovih valova kao što su: Pierson-Moskowitz, JONSWAP, Voznesenski-Necvetaeva, Darbyshirea, Tabain, Davidon i dr. [1,2].

Svi su oni zadani u formi neracionalnih matematičkih izraza, te su u tom obliku neprikladni za korištenje u slučaju teorije automatskog upravljanja. Zbog toga je neophodan njihov prikaz u razlomljenoj racionalnoj formi u funkciji kvadrata frekvencije, tj. u obliku spektra gustoće energije, a za koje je moguće relativno jednostavno odrediti prijenosnu funkciju filtra sa svojstvom da pobuđen bijelim šumom jedinične varijanse generira zadani spektar. Uobičajeni naziv za ovakvu strukturu je obojeni filter (color filter), [3].

U drugom poglavlju rada dat je postupak projektiranja obojenog filtra. Postupak prikaza postojećih spektara u obliku racionalne funkcije kvadrata frekvencije dan je u trećem poglavlju. Značajke postojećih spektara, važne za postupak projektiranja obojenog filtra, prikazane su u četvrtom poglavlju (kao primjer je pokazan Pierson-Moskowitz spektar). Rezultati optimizacije prikazani su u petom poglavlju, a u zaključku su navedene smjernice budućih istraživanja.

2. FILTRI ZA UOBLIČAVANJE SIGNALA

Poznati rezultat iz teorije stohastičkih procesa je veza ulaznog i izlaznog spektra nekog linearnog dinamičkog sustava:

$$S_{yy}(\omega) = |F(j\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \quad (1)$$

Ako je pobudni signal jedinični bijeli šum te ako je spektar $S_{yy}(\omega)$ zadat u razlomljeno racionalnoj formi kao funkcija kvadrata frekvencije, tada se može realizirati fizikalno ostvariva prijenosna funkcija $F(j\omega)$ koja se još naziva i obojeni filter. Neka je:

$$S_{yy}(\omega) = \frac{P(\omega^2)}{Q(\omega^2)} \quad (2)$$

gdje je:

$$P(\omega^2) = \sum_1^{m1} p_i \omega^{2(i-1)} \quad (3)$$

$$Q(\omega^2) = \sum_1^{m2} q_i \omega^{2(i-1)}$$

Ako su p_i i q_i realni brojevi, tada su korijeni pripadnih polinoma konjugirano-kompleksni ili konjugirano imaginarni. Pripadni polinomi mogu se pisati u obliku:

$$P(\omega) = \sqrt{p_{m1}} \prod_1^{m1} (\omega - \Omega_{pk}) \sqrt{p_{m1}} \prod_1^{m1} (\omega - \Omega_{pk}^*) \quad (4)$$

$$Q(\omega) = \sqrt{q_{m2}} \prod_1^{m2} (\omega - \Omega_{qk}) \sqrt{q_{m2}} \prod_1^{m2} (\omega - \Omega_{qk}^*)$$

gdje su Ω_{pk} i Ω_{qk} korijeni iznad realne osi, p_{m1} i q_{m2} koeficijenti polinoma uz najveću potenciju, a konjugirane vrijednosti su označene sa (*). Ako se svaki od polinoma višekратно pomnoži sa $(j)^*(-j) = 1$, gdje je j imaginarna jedinica, tada se gornji polinomi mogu pisati u obliku:

$$P(\omega) = \sqrt{p_{m1}} \prod_1^{m1} (j\omega - j\Omega_{pk}) \sqrt{p_{m1}} \prod_1^{m1} (-j\omega + j\Omega_{pk}^*) \quad (5)$$

$$Q(\omega) = \sqrt{q_{m2}} \prod_1^{m2} (j\omega - j\Omega_{qk}) \sqrt{q_{m2}} \prod_1^{m2} (-j\omega + j\Omega_{qk}^*)$$

odnosno:

$$P(\omega) = p(j\omega)p(-j\omega) = p_+(j\omega)p_-(j\omega)$$

$$Q(\omega) = q(j\omega)q(-j\omega) = q_+(j\omega)q_-(j\omega)$$

gdje svi korijeni $p_+(j\omega)$ i $q_+(j\omega)$ leže u lijevoj polu-ravnini. Kako je:

$$S_{yy}(\omega) = \left| \frac{p_+(j\omega)}{q_+(j\omega)} \right|^2 \quad (6)$$

to je tražena prijenosna funkcija:

$$F(j\omega) = \frac{p_+(j\omega)}{q_+(j\omega)} \quad (7)$$

Osim ovog problema, može se postaviti i inverzni problem, tj. sinteza filtra koji će generirati bijeli šum ako se na njegov ulaz dovede signal poznatog spektra gustoće snage. Njegova prijenosna funkcija je jednaka recipročnoj prijenosnoj funkciji obojenog filtra.

Na ovaj način je priređen postupak za dobivanje obojenog filtra ako je zadan spektar u obliku razlomljeno-racionalne forme u funkciji kvadrata frekvencije.

3. RACIONALIZACIJA FUNKCIJE SPEKTRA

Prvi korak u projektiranju prijenosne funkcije obojenog filtra je aproksimacija spektra u obliku razlomljene racionalne funkcije kvadrata frekvencije. Problem se može predstaviti u obliku minimizacije integrala greške aproksimacije:

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} [S(\omega) - F(\omega^2)]^2 d\omega \quad (8)$$

gdje frekvencije ω_1 i ω_2 definiraju područje od interesa (frekvencijski prozor), a $F(\omega^2)$ je željena aproksimacija, koja je oblika:

$$F(\omega^2) = \frac{a_{m1}\omega^{2m1} + a_{m1-1}\omega^{2(m1-1)} + \dots + a_0}{b_{m2}\omega^{2m2} + b_{m2-1}\omega^{2(m2-1)} + \dots + b_0} \quad (9)$$

Zbog jednoznačnosti rješenja usvaja se $b_0=1$. Skraćeni oblik aproksimacije (9) može se pisati u obliku:

$$F(\omega^2) = \frac{a^T x}{1 + b^T y} \quad (10)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} a^T &= [a_{m1} a_{m1-1} \dots a_0] \\ b^T &= [b_{m2} b_{m2-1} \dots b_1] \\ x^T &= [\omega^{2m1} \omega^{2(m1-1)} \dots 1] \\ y^T &= [\omega^{2m2} \omega^{2(m2-1)} \dots \omega^2] \end{aligned}$$

Ako se podijeli frekvencijsko područje na n točaka tada se kriterij minimuma integrala (8) može pisati u diskretnom obliku:

$$J = \frac{1}{2} \sum_I^n \rho_i \left(S_i - \frac{a^T x_i}{1 + b^T y_i} \right)^2 \quad (11)$$

sa korištenim smjenama:

$$\begin{aligned} S_i &= S(\omega_i) \\ x_i &= x(\omega_i) \\ y_i &= y(\omega_i) \end{aligned}$$

a ρ_i je težinski faktor koji definira oblik prozora, tj. pomoću njega se mogu dodatno otežati dijelovi spektra od interesa. Ovako postavljen zadatak predstavlja nelinearni problem najmanjih kvadrata [4]. Primjena konvencionalnih numeričkih postupaka (gradijentna metoda, fleksibilni poliedar, Fletcher-Powell, SQP i dr.) ukazala je na čitav niz problema (lokalni minimumi, sporost konvergencije i sl.). Zbog toga se predlaže modificirana funkcija cilja u rekurentnom obliku:

$$J^*(k) = \frac{1}{2} \sum_I^n \rho_i \left(S_i - \frac{a^T(k)x_i}{1 + b^T(k)y_i} \right)^2 \cdot \left(\frac{1 + b^T(k)y_i}{1 + b^T(k-1)y_i} \right)^2 \quad (12)$$

za koju vrijedi:

$$J^*(k) \approx J \quad \forall b(k) \approx b(k-1)$$

Sređivanjem izraza (12) konačno se dobiva:

$$\begin{aligned} J^*(k) &= \frac{1}{2} \sum_I^n \rho_i^* [S_i(1 + b^T y_i) - a^T x_i]^2 \\ \rho_i^* &= \frac{\rho_i}{(1 + b^T(k-1)y_i)^2} \end{aligned}$$

Ovako definiranom funkcijom cilja omogućeno je dobivanje analitičkog rješenja u k -toj iteraciji. Naime, iz uvjeta minimuma dobiva se sljedeće:

$$\frac{\partial J^*}{\partial a} = \sum_I^n \rho_i^* [S_i(1 + b^T y_i) - a^T x_i](-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial b} = \sum_I^n \rho_i^* [S_i(1 + b^T y_i) - a^T x_i](S_i y_i) = 0$$

Nakon sređivanja gornjih jednadžbi dobiva se sljedeći sustav jednadžbi:

$$[\sum_I^n \rho_i^* (x_i x_i^T)]a - [\sum_I^n \rho_i^* S_i (x_i y_i^T)]b = \sum_I^n \rho_i^* S_i x_i$$

$$[\sum_I^n \rho_i^* S_i (y_i x_i^T)]a - [\sum_I^n \rho_i^* S_i^2 (y_i y_i^T)]b = \sum_I^n \rho_i^* S_i^2 y_i$$

Gornji sustav jednadžbi može se pisati u matricnom obliku:

$$\begin{bmatrix} M1 & -M2 \\ M3 & -M4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R1 \\ R2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

pišući pojedine parcijalne sume u obliku:

$$R1 = XPSv$$

$$R2 = YSPSv$$

$$M1 = XPX^T$$

$$M2 = XPSY^T$$

$$M3 = YPSX^T$$

$$M4 = YSPSY^T$$

Matrice X i Y sastoje se od stupčastih vektora x_i i y_i (dimenzije su $m_1 \times n$ i $m_2 \times n$, respektivno), matrice P i S su dijagonalne sa elementima ρ_i^* i S_i , a elementi vektora v dimenzije $n \times 1$ su jedinice. Rješavanjem sustava (13) dobiva se rješenje u k -toj iteraciji. Postupak se ponavlja sa smjenom $b(k+1)=b(k)$ do zadovoljenja točnosti.

4. OSNOVNE ZNAČAJKE SPEKTRA

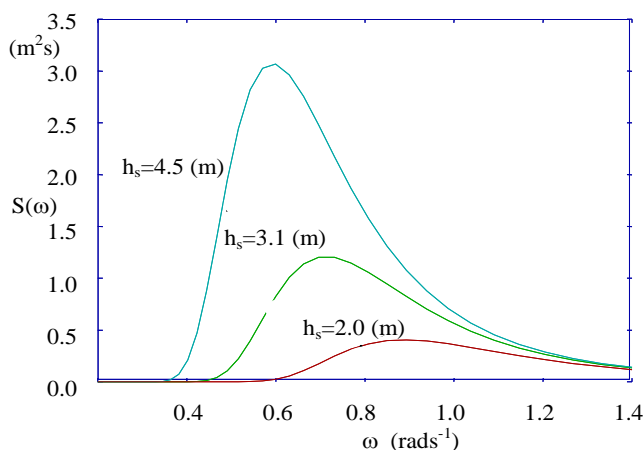
Jedan od često korištenih matematičkih modela spektra vjetrenih valova je poznati Pierson-Moskowitzev (PM) spektar zadan u obliku:

$$S(\omega) = \frac{A}{\omega^5} \exp\left(-\frac{B}{\omega^4}\right) \quad (14)$$

gdje je:

ω - kutna frekvencija (rad/s),
 $A = 0.0081 \text{ g}^2$,
 $B = 3.109 \text{ h}_s^2$,
 h_s - značajna valna visina,
 g - gravitacijska konstanta.

Ovaj jedno-parametarski spektar dovoljno je općenit da obuhvaća većinu opažanja na oceanima i suglasan je sa teoretskim predviđanjima visoko-frekvencijske granice [1]. Na slici 1 prikazan je oblik tog spektra za značajne valne visine $h_s = 2.0, 3.1$ i 4.5 m (ustaljene brzine vjetra 5, 6 i 7 Beauforta).



Slika 1. Spektri vjetrovih valova

Rezonantna frekvencija ima vrijednost:

$$\omega_0^4 = \frac{4B}{5} \quad (15)$$

koja ovisi samo o značajnoj valnoj visini. Navedeni spektar može se pisati u logaritamskom obliku:

$$F(\omega) = 10 \log S(\omega)$$

odnosno:

$$F(\omega) = 10 \log A - 50 \log \omega - 10B \omega^{-4} \log e$$

Dinamičke značajke prijenosne funkcije ovise o nagibima pripadne amplitudsko-frekvencijske karakteristike. Uobičajeno se koristi nagib izražen u dB/dek, odnosno stupnjem nagiba definiranog kao odnos nagiba prema jediničnom nagibu (20 dB/dek). U ovom slučaju nagib je određen sa:

$$\frac{\partial F(\omega)}{\partial(\log \omega)} = -50 + 40B \omega^{-4}$$

odnosno pripadni stupanj nagiba je:

$$n = -2.5 + 2B \omega^{-4} \quad (16)$$

kojem odgovara frekvencija:

$$\omega^4(n) = \frac{2B}{n + 2.5}$$

Ako se pripadna aproksimacija prijenosne funkcije u razlomljeno racionalnoj formi prikaže u funkciji stupnja polinoma brojnika i nazivnika:

$$G(\omega) = \frac{P(\omega, m_1)}{Q(\omega, m_2)}$$

tada je pripadni frekvencijski prozor određen sa:

$$\omega d^4 = \frac{2B}{m_1 + 2.5}$$

$$\omega g^4 = \frac{2B}{m_1 - m_2 + 2.5}$$

Na ovaj način može se približno odrediti struktura prijenosne funkcije obojenog filtra.

Drugi postupak je odabrati takovo područje u kojem je zastupljen najznačajniji dio energije spektra. To se može definirati preko dinamičkog opsega izraženog u dB:

$$\Delta[\text{dB}] = 10 \log S(\omega_0) - 10 \log S(\omega)$$

gdje je ω_0 rezonantna frekvencija, a Δ je dinamički opseg. Rješenje gornje jednadžbe daje frekvencije (zbog karaktera spektra to su uvijek dvije vrijednosti) koje definiraju granice unutar kojih se aproksimira funkcija. U tablici 1 dane su vrijednosti frekvencijskih granica za različite iznose dinamičkog opsega.

h_s (m)	Δ (dB)	ω_d (rad/s)	ω_g (rad/s)
2	40	0.490	7.194
	60	0.453	18.071
4.5	40	0.327	4.796
	60	0.302	12.047
9.2	40	0.229	3.354
	60	0.211	8.426

Tablica 1. Definicija frekvencijskog prozora

5. REZULTATI

Prvi korak u identifikaciji prijenosne funkcije obojenog filtra je određivanje njegove strukture. Pri tome se radi o klasičnom problemu kompromisa između kvalitete aproksimacije (točnost) i jednostavnosti (složenosti) filtra. Dosadašnja istraživanja u području modeliranja ponašanja vjetrovih valova za potrebe projektiranja sustava upravljanja [5] ukazala su na slijedeću strukturu:

$$F(s) = \frac{Ks^2}{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4} \quad (17)$$

koja predstavlja zadovoljavajuće kompromisno rješenje za realni opseg stanja mora. Kako je iz slike 1 vidljivo, pripadni spektar je konveksnog oblika. Prema tome, odgovarajući obojeni filter biti će tipa propusnik opsega. U tom slučaju član u brojniku definira maksimalni nagib u nisko-frekvencijskom području, dok nazivnik prijenosne funkcije aproksimira spektar u odnosu na taj maksimalni nagib. Složeniji oblici spektra će upućivati i na složeniju strukturu prijenosne funkcije. Rezultati optimizacije prikazani su na slikama 2 i 3. Sukladno parametrizaciji osnovnog spektra (jedno-parametarski P-M spektar) u radu [7] predložena je slijedeća parametrizacija aproksimacije spektra:

$$F(s) = K \prod_{i=1}^2 \frac{s}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2}$$

$$K = \sqrt{\frac{0.0661}{\omega_0}} \quad (18)$$

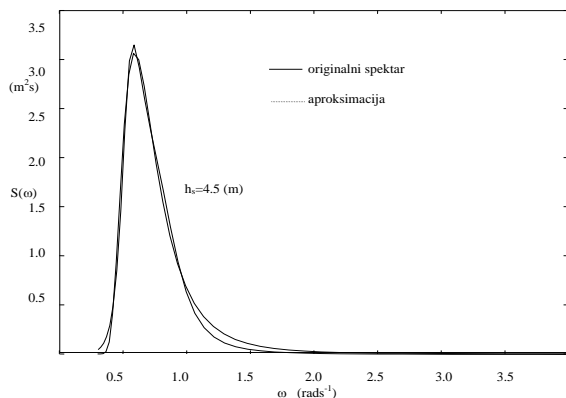
$$\omega_1 = 0.9053\omega_0 \quad \zeta_1 = 0.1896$$

$$\omega_2 = 1.4392\omega_0 \quad \zeta_2 = 0.2991$$

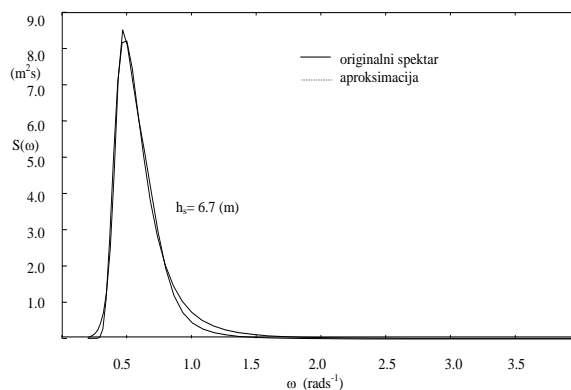
Parametar ovako dobivene aproksimacije originalnog spektra je rezonantna frekvencija ω_0 (15).

6. ZAKLJUČAK

Primjena obojenih filtera za modeliranje energetskih spektara proizvoljnog oblika nalazi punu primjenu kod projektiranja sustava upravljanja plovnim objektima. Postupkom parametrizacije dobivenih prijenosnih funkcija usklađena je informacijska veza originalnog jedno-parametraskog P-M spektra i njegove racionalne aproksimacije. U budućem istraživanju potrebno je provesti ovaj postupak i za druge višeparametrske spektre vjetrovih valova. Primjer primjene ovog modela prikazan je u radu [8]. U budućim istraživanjima treba provesti mogućnosti primjene otežavanja pojedinih dijelova spektra korištenjem odgovarajućeg promjenljivog težinskog faktora.



Slika 2. Spektar vjetrovih valova ($h_s=4.5$ m)



Slika 3. Spektar vjetrovih valova ($h_s=6.7$ m)

LITERATURA

- [1] Lloyd, A.R.J.M., SEAKEEPING: Ship Behaviour in Rough Weather, JW&S, Chichester, 1989, 106-112.
- [2] Tabain, T., Predskazivanje valjanja malih brodova pri istovremenom djelovanju valova i vjetra, Doktorska disertacija, FSB, Zagreb, 1985, 32-46.
- [3] Papoulis, A., Probability, Random variables and Stochastic Processes, McGraw Hill, New York, 1965, 342-350.
- [4] Демиденко, Е.З., Оптимизация и регрессия, Наука, Москва, 1989, 216-232.
- [5] Grimble, M.J., Patton, R.J., Wise, D.A., Use of Kalman filtering techniques in dynamic ship-positioning systems, IEE Proceedings, Vol. 127., No. 1, 1980, 93-102.
- [6] Mandžuka, S., Racionalizacija spektra vjetrovih valova, Simpozij In memoriam prof. L.Sorta, 230-236, Rijeka, Hrvatska, 1992.
- [7] Mandžuka, S., Some characteristics of sea spectrum modelling by coloured filter, 833-841, Proceedings of International Symposium: Waves - Physical and Numerical Modelling, Vancouver, 1994.
- [8] Mandžuka, S., Mathematical model of a submarine at the periscope depth, 129-138, Brodogradnja, Vol. 46, No. 2. 1998

Abstract - The characteristics of sea disturbances (wind, waves, and sea currents) have to be defined quantitatively for the purpose of floating vessels control systems design (auto-pilot, path-control, roll stabilization, dynamic positioning, etc.). The convenient approach for the description of wind-generated waves is in the form of the energy spectral density functions (Pierson-Moskowitz, JONSWAP, Voznesensky-Netsvetavaeva, Darbyshirea, Tabain, etc.). Following a linear theory, using the spectral factorization techniques, the sea spectrum has been modeled by transfer function representation (color filter). An algorithm of non-linear regression for rationalization of sea spectrum is given in the paper.

FLOATING VESSELS CONTROL MATHEMATICAL MODELING OF THE WAVES

Sadko Mandžuka, Ljubomir Kuljača